1) Δίνεται η $f(x)=\frac{1}{x^2}$

α. Να βρεθεί η μορφή Newton του πολυωνύμου παρεμβολής Lagrange της f στα σημεία $x_0=1, x_1=2$ και $x_2=4$

β. Να εκτιμηθεί το αντίστοιχο μέγιστο (κατά απόλυτη τιμή) σφάλμα παρεμβολής

ΛΥΣΗ

α. 3 σημεία $\longrightarrow$ $x_0=1$, $x_1=2$ και $x_2=4$

Άρα, το πολ. παρεμβολής θα είναι 2ου βαθμού

ΜΟΡΦΗ NEWTON

$$P_2(x) = \Delta^0(x_0)(f) + \Delta^1(x_0,x_1)(f)(x-x_0) + \Delta^2(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)$$

ΠΙΝΑΚΑΣ

x_i	$\Delta^0(x_i)(f)$	$\Delta^1(x_i,x_{i+1})(f)$	$\Delta^2(x_i,x_{i+1},x_{i+2})(f)$
$x_0=1$	$1=\Delta^0(x_0)(f)$	$\Delta^1(x_0,x_1)=\frac{\Delta^0(x_1)-\Delta^0(x_0)}{x_1-x_0}=-\frac{3}{4}$	$\Delta^2(x_0,x_1,x_2)=\frac{\Delta^1(x_1,x_2)-\Delta^1(x_0,x_1)}{x_2-x_0}=\frac{7}{32}$
$x_1=2$	$\frac{1}{4}=\Delta^0(x_1)(f)$	$\Delta^1(x_1,x_2)=\frac{\Delta^0(x_2)-\Delta^0(x_1)}{x_2-x_1}=-\frac{3}{32}$	
$x_2=4$	$\frac{1}{16}=\Delta^0(x_2)(f)$		

Άρα, $P_2(x) = 1 - \frac{3}{4}(x-1) + \frac{7}{32}(x-1)(x-2)$

β. Το σφάλμα είναι $|f(x)-P_2(x)| \leq \left|\frac{f^{(2+1)}(\xi)}{(2+1)!}\cdot(x-1)(x-2)(x-4)\right| =$

$$= \left|\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-1)(x-2)(x-4)\right| \quad (*)$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}, \quad f''(x)=\frac{6}{x^4} \quad \text{και} \quad f^{(3)}(x) = -\frac{24}{x^3}$$

Άρα $(*)$ $\left|-\frac{24}{\xi^5}\cdot\frac{1}{6}\right|\cdot|x^3-7x^2+14x-18|$ $(*)(*)$

όπου $1<\xi<4 \Rightarrow 1<\xi^5<1024 \Rightarrow \frac{1}{1024}<\frac{1}{\xi^5}<1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{\xi^5}\right|<1.$

Άρα στην $(*)(*) \leq 4\cdot|x^3-7x^2+14x-18|$ $(*)(*)(*)$

Αρκεί, να βρούμε τη max (κατά απόλυτη τιμή) της $g(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8 \quad \forall x \in (1,4)$.

$g'(x) = 3x^2 - 14x$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{7+\sqrt{7}}{3} \\ x_2 = \dfrac{7-\sqrt{7}}{3} \end{cases}.$$

x	1		$\frac{7-\sqrt{7}}{3}$		$\frac{7+\sqrt{7}}{3}$		4
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

- $g(1) = 0$
- $g\left(\frac{7-\sqrt{7}}{3}\right) = 0{,}63$
- $g\left(\frac{7+\sqrt{7}}{3}\right) = -2{,}11$
- $g(4) = 0$

Δηλαδή $|g(x)| \leq |-2{,}11| = 2{,}11$.

Άρα, η $(*)(*)(*) \leq 4 \cdot 2{,}11 = 8{,}44$.

$\downarrow$

το max απόλυτο σφάλμα παρεμβολής Lagrange.

2) Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής p, σε μορφή Lagrange και Newton που παρεμβάλλει τη συνάρτηση $f(x) = \frac{6x}{x+2}$, στα σημεία $0,\ 0.5,\ 1$. Να υπολογιστεί επίσης μια εκτίμηση του μέγιστου (σε απόλυτη τιμή) σφάλματος παρεμβολής στο $[0,1]$

ΛΥΣΗ

$x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$ και $x_2 = 1$. $\rightarrow$ P βαθμού 2

Lagrange

$$P_2(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2) \quad ①$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = 2(x-0{,}5)\cdot(x-1) = (2x-1)(x-1)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = -4x(x-1)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = 2x(x-0.5)$$

$f(x_0) = f(0) = 0$

$f(x_1) = f(0.5) = 1.2$

$f(x_2) = f(1) = 2.$

Άρα, στην (1) αντικαθιστούμε:

$$P_2(x) = -4.8x(x-1) + 4x(x-0.5) =$$
$$= -0.8x^2 + 2.8x$$

Όμοια με την (1) άσκηση και η μέθοδος Newton

όμοια με την (1) άσκηση και η εύρεση του

απόλυτα μέγιστου σφάλματος παρεμβολής στο [0,1].